View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk
brought to you by CORE
provided by Croatian Digital Thesis Repository

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Manuela Jurić

NEKE PRIMJENE LINEARNE ALGEBRE U GEOMETRIJI

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Marko Erceg

Zagreb, srpanj, 2018.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Najprije želim zahvaliti svom mentoru doc. dr. sc. Marku Ercegu na uloženom trudu i iznimnoj pomoći koju mi je pružio prilikom pisanja ovog rada.
Zatim, želim zahvaliti svom dečku na podršci koju mi je pružio tijekom studiranja i bio uz mene kad je trebalo.
Na kraju i najvažnije, zahvaljujem od srca svojim roditeljima na potpori koju mi daju cijeli život i na svemu što su napravili kako bih ja čvrsto stajala na nogama i bila tu gdje jesam.

Sadržaj

Uvod

Linearna algebra je grana matematike koja se, između ostaloga, bavi vektorskim prostorima i linearnim operatorima. Vektorski prostor je uređena trojka nepraznog skupa i dvije operacije s određenim svojstvima, a može biti snabdjeven još jednom operacijom kojom postaje unitaran prostor. Nešto općenitiji normirani prostori se također promatraju i sve potrebne definicije su navedene u radu. U ovoj teoriji vrlo važnu ulogu imaju linearni operatori koji su aditivna i homogena preslikavanja s vektorskog prostora u vektorski prostor. Cilj ovog rada je prezentirati djelić široke primjene apstraktnog pristupa linearne algebre pri rješavanju mnogih problema iz geometrije.

U prvom poglavlju su dane definicije osnovnih pojmova i navedenih prostora potrebnih u radu.

U drugom poglavlju je iskazana Cauchy - Bunjakovski - Schwarzova nejednakost u unitarnim prostorima, te dokazana na četiri različita načina, s tim da neki pokrivaju samo slučaj realnih konačnodimenzionalnih prostora. Navedene su četiri zanimljive primjene ove nejednakosti u geometriji.

U trećem poglavlju je na apstraktnoj razini (realnih) unitarnih prostora iskazan i dokazan Mazur - Ulamov teorem kojim je dana karakterizacija izometrija unitarnih prostora. Radi dokazivanja ovog teorema se uvodi pojam centra koji se opisuje nizom tehničkih rezultata nakon kojih Mazur - Ulamov teorem dolazi kao jednostavna posljedica. Na kraju poglavlja se diskutiraju i opravdavaju pretpostavke teorema dvama primjerima.

U četvrtom poglavlju je, koristeći izometrije ravnine, odnosno transformacije koordinata, na primjerima opisan postupak svođenja krivulja drugog reda na kanonski oblik.

Poglavlje 1

Pojmovi

Na početku rada dajemo osnovne definicije, tvrdnje i primjere potrebne za bolje razumijevanje teksta koji slijedi. Detalji se mogu pročitati u [1] i [3].

Definicija 1.0.1 (Vektorski prostor)**.** *Neka je V neprazan skup na kojem su zadane binarne operacije zbrajanja, $+ : V \times V \to V$, i množenja skalarima iz polja $\mathbb{F}$, $\cdot : \mathbb{F} \times V \to V$. Kažemo da je uređena trojka $(V, +, \cdot)$ vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ ako vrijedi:*

1. $(\forall\, x, y, z \in V) \quad x + (y + z) = (x + y) + z$
2. $(\exists\, 0 \in V)(\forall x \in V) \quad x + 0 = 0 + x = x$
3. $(\forall x \in V)(\exists -x \in V) \quad x + (-x) = -x + x = 0$
4. $(\forall x, y \in V) \quad x + y = y + x$
5. $(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F})(\forall x \in V) \quad \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$
6. $(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F})(\forall x \in V) \quad (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$
7. $(\forall \alpha \in \mathbb{F})(\forall x, y \in V) \quad \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$
8. $(\forall x \in V) \quad 1 \cdot x = x\,.$

Definicija 1.0.2 (Normiran prostor)**.** *Neka je V vektorski prostor. Norma na V je funkcija $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ sa sljedećim svojstvima:*

1. $(\forall x \in V) \quad \|x\| \geq 0$
2. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
3. $(\forall \alpha \in \mathbb{F})(\forall x \in V) \quad \|\alpha x\| = |\alpha|\,\|x\|$

4. $(\forall x, y \in V)\quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *(nejednakost trokuta).*

Uređen par $(X, \|\cdot\|)$ se naziva normiran prostor.

Definicija 1.0.3 (Unitaran prostor)**.** *Neka je $(V, +, \cdot)$ vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$. Skalarni produkt na V je preslikavanje $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{F}$ koje ima sljedeća svojstva:*

1. $(\forall x \in V)\quad \langle x, x\rangle \geq 0$
2. $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$
3. $(\forall x_1, x_2, y \in V)\quad \langle x_1 + x_2, y\rangle = \langle x_1, y\rangle + \langle x_2, y\rangle$
4. $(\forall \alpha \in \mathbb{F})(\forall x, y \in V)\quad \langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$
5. $(\forall x, y \in V)\quad \langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$.

Vektorski prostor nad kojim je definiran skalarni produkt zove se unitaran prostor.

Svaki unitarni prostor $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ je također i normiran prostor. Jedna moguća norma na V je upravo dana s $\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$, $x \in V$, i ta norma se naziva *norma inducirana skalarnim produktom*.

Slijede primjeri standardnih skalarnih produkata na n-dimenzionalnim realnim i kompleksnim prostorima, te pripadnih normi induciranih tim skalarnim produktima.

Primjer 1.0.4. *U $\mathbb{C}^n$ standardni skalarni produkt za $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ i $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ definiran je s*

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i\overline{y_i}\,.$$

Norma inducirana gornjim skalarnim produktom na $\mathbb{C}^n$ dana je s

$$\|x\|_2 := \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i\overline{x_i}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}\,.$$

Primjer 1.0.5. *U $\mathbb{R}^n$ standardni skalarni produkt za $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ i $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ definiran je s*

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i\,.$$

Norma inducirana gornjim skalarnim produktom na $\mathbb{R}^n$ dana je s

$$\|x\|_2 := \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

i ta se norma naziva euklidska norma.
Kada neće postojati mogućnost zabune, kraće ćemo pisati $\|\cdot\|$ *umjesto* $\|\cdot\|_2$.

Međutim, nisu sve norme inducirane skalarnim produktom. U sljedećem primjeru imamo jednu od njih.

Primjer 1.0.6. *Uređeni par* $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ *je normiran prostor, gdje je*

$$\|(x_1, x_2, \dots, x_n)\|_\infty = max\{|x_i| : i = 1, 2, \dots, n\},$$

ali norma $\|\cdot\|_\infty$ *nije inducirana skalarnim produktom. Kada bi norma* $\|\cdot\|_\infty$ *bila inducirana skalarnim produktom, morala bi za svaki* $x, y \in \mathbb{R}^n$ *biti zadovoljena jednakost*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

koja se naziva jednakost paralelograma. Međutim, već u prostoru $\mathbb{R}^2$ *za vektore* $x = (1, 0)$ *i* $y = (0, 1)$ *imamo*

$$\|x + y\|_\infty^2 + \|x - y\|_\infty^2 = \|(1, 1)\|_\infty^2 + \|(0, -1)\|_\infty^2 = 2$$

i

$$2\|x\|_\infty^2 + 2\|y\|_\infty^2 = 2\|(1, 0)\|_\infty^2 + 2\|(0, 1)\|_\infty^2 = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 4$$

što je očito različito. Dakle, jednakost paralelograma nije zadovoljena pa zaključujemo da norma $\|\cdot\|_\infty$ *nije inducirana skalarnim produktom.*

Teorija normiranih prostora obuhvaća puno pojmova i zanimljivih tvrdnji, no istaknut ćemo samo još neke koje su važne za ovaj rad.

Definicija 1.0.7. *Neka je* $(X, \|\cdot\|)$ *normiran prostor i* $Y \subseteq X$. *Tada definiramo dijametar skupa* Y *s* $\mathrm{diam}(Y) := \sup\{\|x - y\| : x, y \in Y\}$. *Za prazan skup definiramo* $\mathrm{diam}(\emptyset) = 0$.

Uočima da za $x, y \in Y$, $x \neq y$, iz same definicije dijametra slijedi

$$\mathrm{diam}(Y) \geq \|x - y\| > 0\,.$$

Time zaključujemo da je $\mathrm{diam}(Y) = 0$ ako i samo ako je Y prazan skup ili jednočlan skup.

Definicija 1.0.8. *Neka je* $(X, \|\cdot\|)$ *normiran prostor. Niz* $(a_n)_n$ *u* X *je konvergentan ako za neki* $a \in X$ *niz brojeva* $(\|a_n - a\|)_n$ *konvergira i vrijedi* $\lim\limits_{n\to\infty} \|a_n - a\| = 0$, *to jest*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}) \quad (n \geq n_\varepsilon) \Rightarrow (\|a_n - a\| < \varepsilon)\,.$$

Definicija 1.0.9. *Neka su $(X, \|\cdot\|_X)$ i $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normirani prostori. Funkciju $f : X \to Y$ nazivamo izometrijom ako za svaki $x_1, x_2 \in X$ vrijedi*

$$\|x_1 - x_2\|_X = \|f(x_1) - f(x_2)\|_Y .$$

Primjer 1.0.10. *Neka je $X = Y = \mathbb{R}^n$ i $f : X \to Y$ linearan operator koji je unitaran, to jest čiji je matrični prikaz u kanonskoj bazi ortogonalna matrica U. Za kvadratnu matricu U kažemo da je ortogonalna ako vrijedi $UU^T = U^T U = I$, gdje je s U^T označena transponirana matrica matrice U. Pokazat ćemo da je f izometrija. Imamo*

$$\begin{aligned}
\|f(x_1, x_2)\|^2 =& \|Ux_1 - Ux_2\|^2 \\
=& \|U(x_1 - x_2)\| \\
=& \langle U(x_1 - x_2), U(x_1 - x_2)\rangle \\
=& \langle U^T U(x_1 - x_2), (x_1 - x_2)\rangle \\
=& \langle I(x_1 - x_2), (x_1 - x_2)\rangle \\
=& \langle x_1 - x_2, x_1 - x_2\rangle \\
=& \|x_1 - x_2\|^2 .
\end{aligned}$$

Pri tome smo kod treće i kod posljednje jednakosti koristili definiciju norme inducirane skalarnim produktom, a kod četvrte svojstvo ortogonalnih operatora $\langle Ux, y\rangle = \langle x, U^T y\rangle$. Sada vidimo da je $\|f(x_1, x_2)\| = \|x_1 - x_2\|$ pa je f očito izometrija.

Nije teško pokazati da je za proizvoljnu matricu U i za $y \in Y$ preslikavnje

$$x \mapsto Ux + y$$

također izometrija. U trećem poglavlju ćemo dati uvjete uz koje će u proizvoljnom unitarnom prostoru svaka izometrija biti nužno gornjeg oblika.

Poglavlje 2

Cauchy - Bunjakovski - Schwarzova nejednakost

U ovom poglavlju iskazat ćemo Cauchy - Bunjakovski - Schwarzovu nejednakost, te ju dokazati na nekoliko različitih načina. Potom ćemo prikazati nekoliko primjena ove nejednakosti u geometriji.
Od sada nam $\mathbb{F}$ označava polje realnih brojeva ($\mathbb{R}$) ili polje kompleksnih brojeva ($\mathbb{C}$).

2.1 Iskaz i nekoliko dokaza

Ova formulacija teorema, kao i njegov dokaz, nalazi se u [1, §6].

Teorem 2.1.1 (Cauchy - Bunjakovski - Schwarzova nejednakost)**.** *Neka je $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ unitaran prostor nad poljem $\mathbb{F}$. Tada za sve $x, y \in V$ vrijedi*

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle\,.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako su vektori x i y linearno zavisni.

Primjer 2.1.2. *Cauchy - Bunjakovski - Schwarzova nejednakost u prostoru $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ s normom iz Primjera 1.0.5 glasi*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} y_i^2\,.$$

Jednakost je trivijalno ispunjena ako je $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ nul-vektor, dok u suprotnom ($y \neq 0$) jednakost vrijedi ako i samo ako postoji $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da za svaki $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ vrijedi $x_i = \lambda y_i$.

Dokaz Teorema 2.1.1 (prvi dokaz). Ako je $x = 0$ ili $y = 0$, tvrdnja očito vrijedi.
Neka je sada $x \neq 0$ i $y \neq 0$, te neka je $\lambda \in \mathbb{F}$ bilo koji skalar. Po svojstvu (1) iz definicije 1.0.3 unitarnog prostora znamo da je

$$0 \leq \langle x - \lambda y, x - \lambda y\rangle.$$

Koristeći ostala svojstva imamo sljedeće:

$$\langle x - \lambda y, x - \lambda y\rangle = \langle x, x\rangle - \lambda\langle y, x\rangle - \bar{\lambda}\langle x, y\rangle + \lambda\bar{\lambda}\langle y, y\rangle.$$

Budući da je $\lambda \in \mathbb{F}$ proizvoljan i y različit od nule, uzmimo $\lambda = \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle}$. Sada uvrstimo takav skalar u gornju nejednakost:

$$0 \leq \langle x, x\rangle - \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle} \cdot \langle y, x\rangle - \frac{\langle y, x\rangle}{\langle y, y\rangle} \cdot \langle x, y\rangle + \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle} \cdot \frac{\langle y, x\rangle}{\langle y, y\rangle} \cdot \langle y, y\rangle.$$

Budući da je $-\frac{\langle y, x\rangle}{\langle y, y\rangle} \cdot \langle x, y\rangle + \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle} \cdot \frac{\langle y, x\rangle}{\langle y, y\rangle} \cdot \langle y, y\rangle = 0$, imamo

$$0 \leq \langle x, x\rangle - \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle} \cdot \langle y, x\rangle.$$

Množenjem te nejednakosti skalarom $\langle y, y\rangle > 0$ dobivamo

$$0 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle - \langle x, y\rangle\langle y, x\rangle,$$

a kako je $\langle x, y\rangle\langle y, x\rangle = |\langle x, y\rangle|^2$, to je

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$$

čime je prvi dio teorema dokazan. Da bismo dokazali drugi dio teorema, moramo dokazati dvije implikacije.
Pretpostavimo najprije da su x i y linearno zavisni. Ako je $y = 0$, onda jednakost trivijalno vrijedi. Neka je sada $y \neq 0$. Tada postoji $\alpha \in \mathbb{F}$ takav da je $x = \alpha y$. Imamo

$$|\langle x, y\rangle|^2 = |\langle \alpha y, y\rangle|^2 = |\alpha|^2|\langle y, y\rangle|^2 .$$

S druge strane imamo

$$\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle = \langle \alpha y, \alpha y\rangle\langle y, y\rangle = \alpha\overline{\alpha}\langle y, y\rangle\langle y, y\rangle = |\alpha|^2|\langle y, y\rangle|^2.$$

Dakle, ako su x i y linearno zavisni, onda je $|\langle x, y\rangle|^2 = \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$.
Pretpostavimo sada da vrijedi $|\langle x, y\rangle|^2 = \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$ i $y \neq 0$. Drugačije to možemo zapisati kao

$$\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle - \langle x, y\rangle\langle y, x\rangle = 0 .$$

Dijeljenjem te jednakosti sa $\langle y, y\rangle$ što je strogo veće od nule, te dodavanjem razlike

$$-\frac{\langle y, x\rangle}{\langle y, y\rangle} \cdot \langle x, y\rangle + \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle} \cdot \frac{\langle y, x\rangle}{\langle y, y\rangle} \cdot \langle y, y\rangle = 0$$

kojom ništa ne mijenjamo jer je jednaka nuli, dobivamo

$$\langle x, x\rangle - \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle} \cdot \langle y, x\rangle - \frac{\langle y, x\rangle}{\langle y, y\rangle} \cdot \langle x, y\rangle + \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle} \cdot \frac{\langle y, x\rangle}{\langle y, y\rangle} \cdot \langle y, y\rangle = 0\,.$$

Definirajmo $\alpha := \dfrac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle}$. Tada u gornjoj jednakosti imamo $\langle x - \alpha y, x - \alpha y\rangle = 0$ što znači upravo da je $x - \alpha y = 0$, odnosno $x = \alpha y$ što je i trebalo pokazati.

□

Dokaz Teorema 2.1.1 uz $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ (drugi dokaz). Ako je $\mathbb{F}$ polje realnih brojeva $\mathbb{R}$, tada je $\overline{\lambda} = \lambda$ pa je dokaz nešto jednostavniji; pomoću kvadratne nejednadžbe. Naime, tada imamo

$$\begin{aligned} 0 \le \langle x - \lambda y, x - \lambda y\rangle &= \langle x, x\rangle - 2\lambda^2\langle x, y\rangle + \lambda^2\langle y, y\rangle \\ &= ||x||^2 - 2\lambda\langle x, y\rangle + \lambda^2||y||^2 \\ &= \lambda^2||y||^2 - 2\lambda\langle x, y\rangle + ||x||^2 \end{aligned}$$

gdje smo iskoristili definiciju norme na $\mathbb{R}^n$ iz Primjera 1.0.5. Za $y = 0$ tvrdnja trivijalno vrijedi, a za $y \neq 0$ uočavamo kvadratnu funkciju $f(\lambda) = \lambda^2||y||^2 - 2\lambda\langle x, y\rangle + ||x||^2$ koja je uvijek pozitivna. Diskriminanta takve kvadratne funkcije mora biti manja ili jednaka nuli, odnosno mora vrijediti

$$4\langle x, y\rangle^2 - 4||x||^2||y||^2 \le 0$$

što nam sređivanjem daje upravo traženu nejednakost

$$\langle x, y\rangle^2 \le ||x||^2||y||^2 = \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle.$$

Jednakost se dokazuje kao i u prvom slučaju. □

Dokažimo sada Cauchy - Bunjakovski - Schwarzovu nejednakost u realnom vektorkom prostoru $\mathbb{R}^n$ na dva načina.

Dokaz Primjera 2.1.2 prema [6] (treći dokaz). Koristeći nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine dokazat ćemo Cauchy - Bunjakovski - Schwarzovu nejednakost za proizvoljne $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n), b = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$.

Za svaki $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ definirajmo $x_i := \dfrac{B}{A}a_i^2$ i $y_i := \dfrac{A}{B}b_i^2$, pri čemu su $A = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$ i

$B = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}$. Uočimo da su za svaki $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ brojevi x_i i y_i pozitivni, pa možemo iskoristiti nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine, odnosno za svaki $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ imamo

$$\sqrt{x_i y_i} \leq \frac{x_i + y_i}{2}.$$

Uvrstimo li čemu su jednaki x_i i y_i dobivamo s lijeve strane

$$\sqrt{x_i y_i} = \sqrt{\frac{B}{A} a_i^2 \cdot \frac{A}{B} b_i^2} = \sqrt{a_i^2 b_i^2} = |a_i b_i|,$$

a s desne strane

$$\frac{x_i + y_i}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{B}{A} a_i^2 + \frac{A}{B} b_i^2\right),$$

odnosno, vidimo da za svaki $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ vrijedi

$$|a_i b_i| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{B}{A} a_i^2 + \frac{A}{B} b_i^2\right).$$

Kako ova nejednakost vrijedi za svaki $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, zaključujemo da vrijedi

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i| \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}\left(\frac{B}{A} a_i^2 + \frac{A}{B} b_i^2\right),$$

odnosno

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{B}{A} \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \frac{A}{B} \sum_{i=1}^{n} b_i^2\right).$$

Uočimo da je $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = A^2$ i $\sum_{i=1}^{n} b_i^2 = B^2$. Stoga je

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i| &\leq \frac{1}{2}\left(\frac{B}{A} \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \frac{A}{B} \sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{B}{A} A^2 + \frac{A}{B} B^2\right) \\
&= \frac{1}{2}(BA + AB) \\
&= AB \\
&= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}.
\end{aligned}$$

Prema nejednakosti trokuta za realne brojeve je $\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i b_i|$, a to povlači Cauchy - Bunjakovski - Schwarzovu nejednakost

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}.$$

Jednakost vrijedi kada vrijedi jednakost između aritmetičke i geometrijske sredine (ako za svaki i vrijedi $x_i = y_i$) i jednakost u nejednakosti trokuta (ako su svi $a_i b_i$ jednakog predznaka). Ako je $x_i = y_i$, onda je $\frac{B}{A} a_i^2 = \frac{A}{B} b_i^2$ iz čega slijedi $a_i^2 = \frac{A^2}{B^2} b_i^2$, a to je ekvivalentno $|a_i| = \frac{A}{B}|b_i|$. No, kako još moraju svi $a_i b_i$ biti jednakog predznaka, to je $a_i = \frac{A}{B} b_i$ (ako su a_i i b_i istog predznaka) ili $a_i = -\frac{A}{B} b_i$ (a_i, b_i različitog predznaka). U oba slučaja su a i b linearno zavisni. □

Dokaz Primjera 2.1.2 prema [6] (četvrti dokaz). Neka su $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ i $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$. Promatrat ćemo očitu činjenicu da je suma kvadrata realnih brojeva uvijek veća ili jednaka 0. Kvadriranjem izraza u zagradi i razdvajanjem dvostrukih suma prema pravilima imamo

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (a_i b_j - a_j b_i)^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (a_i^2 b_j^2 + a_j^2 b_i^2 - 2 a_i b_j a_j b_i) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i^2 b_j^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_j^2 b_i^2 - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i b_j a_j b_i \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{j=1}^{n} b_j^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \sum_{j=1}^{n} a_j^2 - \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \sum_{j=1}^{n} a_j b_j \end{aligned}$$

Dakle, imamo

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{j=1}^{n} b_j^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{j=1}^{n} b_j^2 - \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \sum_{j=1}^{n} a_j b_j \geq 0$$

što je ekvivalentno

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \geq 0,$$

odnosno
$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2,$$
a to je i trebalo pokazati.
Jednakost vrijedi ako i samo ako je za svaki $i, j \in \mathbb{N}$ razlika $a_i b_j - a_j b_i$ jednaka nuli, odnosno $a_i b_j = a_j b_i$. Ako je $b = 0$, onda su a i b linearno zavisni i trivijalno vrijedi jednakost. Ako je $b \neq 0$, onda postoji $j \in \mathbb{N}$ takav da je $b_j \neq 0$. Za proizvoljan $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ je tada $a_i b_j = a_j b_i$, što je nakon dijeljenja s b_j ekvivalentno jednakosti $a_i = \frac{a_j}{b_j} b_i$. Time smo dobili
$$a = \frac{a_j}{b_j} b\,,$$
odnosno a i b su linearno zavisni. □

2.2 Primjena

Cauchy - Bunjakovski - Schwarzova nejednakost ima veliku primjenu u geometriji. Za početak, definicija kuta u realnom unitarnom prostoru slijedi iz nje. Nadalje, mnoge nejednakosti i jednakosti među elementima trokuta mogu se dokazati pomoću ove nejednakosti, a primjenu je pronašla i u određivanju maksimuma funkcije. Nejednakost između aritmetičke i kvadratne sredine se jednostavno dokazuje korištenjem Cauchy - Bunjakovski - Schwarzove nejednakosti, te se još mnoge nejednakosti između realnih brojeva mogu dokazati pomoću nje.

Kut u realnom unitarnom prostoru

Kut između dva nenul vektora x i y u realnom unitarnom prostoru $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ definira se pomoću sljedeće relacije
$$\cos \sphericalangle(x, y) = \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\,\|y\|}\,,$$
pri čemu je $\|\cdot\|$ norma inducirana skalarnim produktom $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Pomoću Cauchy - Bunjakovski - Schwarzove nejednakosti pokazat ćemo da je ova definicija dobra, odnosno da je skalar $\frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\,\|y\|}$ zaista realan broj iz segmenta $[-1, 1]$ pa time i u slici kosinusa. Dakle, znamo da vrijedi
$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|\,.$$
Ovo je ekvivalentno
$$\frac{|\langle x, y\rangle|}{\|x\|\,\|y\|} \leq 1$$

jer su $||x||$ i $||y||$ strogo veći od nule. Na kraju, kako su i brojnik i nazivnik pozitivni brojevi, možemo pisati

$$\left| \frac{\langle x, y \rangle}{||x|| \, ||y||} \right| \leq 1 \,,$$

a to upravo znači da je

$$-1 \leq \frac{\langle x, y \rangle}{||x|| \, ||y||} \leq 1 \,.$$

Jednakost u Cauchy - Bunjakovski - Schwarzovoj nejednakosti postiže se kada su x i y linearno zavisni, odnosno kada postoji $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da je $y = \lambda x$. Tada je

$$\cos \sphericalangle(x, y) = \cos \sphericalangle(x, \lambda x) = \frac{\langle x, \lambda x \rangle}{||x|| \, ||\lambda x||} \,.$$

Koristeći svojstva skalarnog produkta, dobivamo sljedeći niz jedakosti

$$\frac{\langle x, \lambda x \rangle}{||x|| \, ||\lambda x||} = \frac{\lambda \langle x, x \rangle}{||x|| \, |\lambda| \, ||x||} = \frac{\lambda ||x||^2}{|\lambda| \, ||x||^2} = \frac{\lambda}{|\lambda|} \,.$$

Dakle, dobili smo

$$\cos \sphericalangle(x, y) = \frac{\lambda}{|\lambda|} \,.$$

Znamo da je $\frac{\lambda}{|\lambda|}$ jednako 1 ili -1, a kada je kosinus kuta jednak 1 ili -1, onda je kut jednak 0 ili π. Time uočavamo da je definicija kuta u skladu s geometrijskom interpretacijom po kojoj su dva nenul vektora linearno nezavisna ako i samo ako je kut među njima jednak 0 ili π.

Geometrijski zadatak

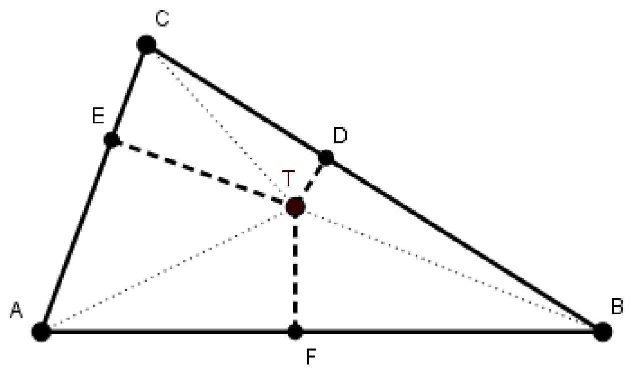
Pomoću Cauchy - Bunjakovski - Schwarzove nejednakosti riješit ćemo zadatak koji se pojavio na Međunarodnoj matematičkoj olimpijadi održanoj 1981. godine. Tekst zadatka nalazi se na [7], a glasi:

> Neka je T točka unutar trokuta ABC i neka su D, E i F redom nožišta okomica iz T na pravce BC, CA i AB. Nađite sve točke T za koje je zbroj $\frac{|BC|}{|TD|} + \frac{|CA|}{|TE|} + \frac{|AB|}{|TF|}$ najmanji.

Rješenje. Označimo zbroj $\frac{|BC|}{|TD|} + \frac{|CA|}{|TE|} + \frac{|AB|}{|TF|}$ sa S, te površinu trokuta ABC sa P. Uočavamo sa Slike 2.1 da je površina trokuta ABC jednaka zbroju površina trokuta ABT,

BCT i CAT koje lako možemo izraziti pomoću danih veličina. Naime, točka T je zajednička tim trokutima, a okomice iz T na pravce na kojima leže stranice su visine tih trokuta pa je

$$P(\triangle BCT) = \frac{1}{2}|BC|\,|TD|\,, \qquad P(\triangle CAT) = \frac{1}{2}|CA|\,|TE|\,, \qquad P(\triangle ABT) = \frac{1}{2}|AB|\,|TF|\,.$$



Slika 2.1: Točka T u proizvoljnom položaju unutar trokuta ABC

Zaključujemo da je

$$2P = |BC|\,|BT| + |CA|\,|TE| + |AB|\,|TF|\,.$$

Iskoristit ćemo Cauchy - Bunjakovski - Schwarzovu nejednakost za brojeve

$$x_1 = \sqrt{|BC|}\,\sqrt{|TD|}\,, \quad x_2 = \sqrt{|CA|}\,\sqrt{|TE|}\,, \quad x_3 = \sqrt{|AB|}\,\sqrt{|TF|}$$

$$y_1 = \frac{\sqrt{|BC|}}{\sqrt{|TD|}}\,, \quad y_2 = \frac{\sqrt{|CA|}}{\sqrt{|TE|}}\,, \quad y_3 = \frac{\sqrt{|AB|}}{\sqrt{|TF|}}\,.$$

Imamo

$$(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)^2 \leq (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)\,,$$

odnosno

$$(|BC| + |CA| + |AB|)^2 \leq (|BC|\,|TD| + |CA|\,|TE| + |AB|\,|TF|)\Big(\frac{|BC|}{|TD|} + \frac{|CA|}{|TE|} + \frac{|AB|}{|TF|}\Big).$$

Sada s lijeve strane nejednakosti uočavamo kvadrat opsega trokuta koji ćemo označiti s o^2, a s desne strane umnožak dvostruke površine trokuta, $2P$, i zbroja S. Iz ovoga slijedi da je

$$S \geq \frac{o^2}{2P}.$$

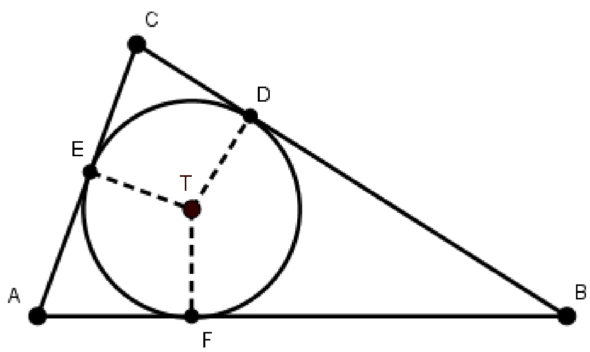
Dakle, zadani zbroj S je uvijek veći ili jednak dobivenom broju $\frac{o^2}{2P}$. Preostalo je još ispitati može li S zaista postići tu vrijednost. Ako može, onda je upravo ona najmanja vrijednost koja se postiže. Budući da smo koristili Cauchy - Bunjakovski - Schwarzovu nejednakost, znamo da će jednakost vrijediti ako i samo ako postoji realan broj α takav da je $x_i = \alpha y_i$, za $i = 1, 2, 3$, to jest $x_i^2 = \alpha^2 y_i^2$, a to znači

$$|BC|\,|TD| = \alpha^2 \frac{|BC|}{|TD|}$$

$$|CA|\,|TE| = \alpha^2 \frac{|CA|}{|TE|}$$

$$|AB|\,|TF| = \alpha^2 \frac{|AB|}{|TF|}.$$

Sada lako zaključujemo da mora biti $|TD| = |TE| = |TF| = \alpha$, odnosno da bi bilo $S = \frac{o^2}{2P}$, točka T mora biti jednako udaljena od svih stranica trokuta. Postoji točno jedna točka koja ispunjava taj uvjet i to je središte trokutu upisane kružnice. Rješenje vidimo na Slici 2.2.



Slika 2.2: Točka T je središte trokutu upisane kružnice

Određivanje maksimuma funkcije

Cauchy - Bunjakovski - Schwarzova nejednakost može se koristiti za određivanje maksimuma funkcije. Dat ćemo primjer određivanja maksimuma linearne funkcije na elipsoidu, a on se lako može modificirati za druge funkcije i krivulje.

Općenito, za funkciju $f(x) = \alpha x + \beta y + \gamma z$ na krivulji $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ želimo naći zapis oblika

$$f(x) = \alpha a \cdot \frac{x}{a} + \beta b \cdot \frac{y}{b} + \gamma c \cdot \frac{z}{c}, \tag{2.1}$$

pri čemu pretpostavljamo da su $a, b, c \neq 0$. Na konkretnom primjeru ćemo vidjeti zašto je taj zapis pogodan.

Primjer 2.2.1. *Odredimo maksimum funkcije* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *zadane s* $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ *na krivulji* $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$.

Zapišimo najprije funkciju kako je gore opisano. Imamo

$$f(x) = 2 \cdot \frac{x}{2} + 6 \cdot \frac{y}{3} + 12 \cdot \frac{z}{4}.$$

Iskoristimo Cauchy - Bunjakovski - Schwarzovu nejednakost za trojke $(2, 6, 12)$ *i* $\left(\frac{x}{2}, \frac{y}{3}, \frac{z}{4}\right)$. *Imamo*

$$2 \cdot \frac{x}{2} + 6 \cdot \frac{y}{3} + 12 \cdot \frac{z}{4} \leq \sqrt{2^2 + 6^2 + 12^2} \sqrt{\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} + \frac{z^2}{4^2}}.$$

Sada s desne strane nejednakosti pod korijenom uočavamo upravo jednadžbu zadane krivulje, što je razlog radi kojeg funkciju zapisujemo u oblik (2.1). *Uvrstimo i izačunajmo:*

$$\begin{aligned} 2 \cdot \frac{x}{2} + 6 \cdot \frac{y}{3} + 12 \cdot \frac{z}{4} &\leq \sqrt{184} \cdot 1 \\ &= 2\sqrt{46}. \end{aligned}$$

Dakle, za sve x, y, z *koji zadovoljavaju jednadžbu krivulje vrijedi* $f(x, y, z) \leq 2\sqrt{46}$, *a to upravo znači da je* $2\sqrt{46}$ *maksimum funkcije* f *na zadanoj krivulji. Naime, iz Teorema 2.1.1 znamo da vrijedi jednakost u gornjoj nejednakosti za* $(x, y, z) = \lambda(4, 8, 18)$, *pri čemu je* $\lambda \in \mathbb{R}$ *proizvoljan. Dovoljno je pronaći jedan* λ *za koji ta točka pripada krivulji. Jednostavnim računom dobivamo da je jedan takav* $\lambda = \frac{1}{2\sqrt{46}}$. *Dakle, točka* $\left(\frac{2}{\sqrt{46}}, \frac{9}{\sqrt{46}}, \frac{24}{\sqrt{46}}\right)$ *pripada krivulji i* $f\left(\frac{2}{\sqrt{46}}, \frac{9}{\sqrt{46}}, \frac{24}{\sqrt{46}}\right) = 2\sqrt{46}$.

Nejednakost između aritmetičke i kvadratne sredine

Dokažimo nejednakost koja vrijedi između aritmetičke i kvadratne sredine pomoću Cauchy - Bunjakovski - Schwarzove nejednakosti.
Cauchy - Bunjakovski - Schwarzova nejednakost za realne brojeve glasi

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}.$$

Neka je $b_i = 1$ za svaki $i = 1, \ldots, n$. Tada je

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot 1 \leq & \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} 1^2} \\ \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} a_i \leq & \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \sqrt{n} \\ \Leftrightarrow \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i \leq & \frac{\sqrt{n}}{n} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \\ \Leftrightarrow \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i \leq & \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i^2}. \end{aligned}$$

Dakle, aritmetička sredina brojeva manja je ili jednaka kvadratnoj sredini tih brojeva.

Poglavlje 3

Mazur - Ulamov teorem

U ovom ćemo poglavlju dokazati Mazur - Ulamov teorem koji nam daje uvjete koji moraju biti ispunjeni kako bi izometrija između dva normirana prostora bila linearan operator. Za dokaz teorema potrebno nam je nekoliko pomoćnih tvrdnji koje će također biti dokazane. Na kraju ćemo na dva primjera pokazati da su svi uvjeti iz teorema nužni za linearnost. Neke od sljedećih tvrdnji su ukratko dokazane u [2] gdje se može pročitati više o izometrijama na Banachovim prostorima.

3.1 Centar para

Neka je $(X, \|\cdot\|)$ normiran prostor, te $x, y \in X$. Definirat ćemo skup H_n induktivno na sljedeći način:
$H_1(x,y) = \left\{ u \in X : \|x-u\| = \|y-u\| = \frac{1}{2}\|x-y\| \right\}$
$H_n(x,y) = \left\{ u \in H_{n-1}(x,y) : \|u-v\| \le \frac{1}{2}\mathrm{diam}(H_{n-1}(x,y)), v \in H_{n-1}(x,y) \right\}.$
Želimo pokazati da je presjek svih $H_n(x,y)$ ili prazan ili se sastoji od točno jednog elementa kojeg onda zovemo *centar para* x, y.

Lema 3.1.1. *Ako za neki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $H_n(x,y) = \{u\}$, onda za svaki $m \ge n$ vrijedi $H_m(x,y) = \{u\}$.*

Dokaz. Neka su $x, y \in X$. Ako za neki $n \in \mathbb{N}$ imamo $H_n(x,y) = \{u\}$, onda znamo da je $\mathrm{diam}(H_n(x,y)) = 0$ (vidi komentar nakon Definicije 1.0.7). Tada je

$$\begin{aligned} H_{n+1}(x,y) &= \left\{ u \in H_n(x,y) : \|u-v\| \le \frac{1}{2}\mathrm{diam}(H_n(x,y)), v \in H_n(x,y) \right\} \\ &= \{ u \in H_n(x,y) : \|u-v\| \le 0, v \in H_n(x,y) \}. \end{aligned}$$

No, to znači da je $u = v$, pa je $H_{n+1}(x, y) = \{u\}$. Induktivno možemo zaključiti da tvrdnja vrijedi za svaki $m \geq n$. □

Pokažimo na dva primjera kako doći do centra para x, y u prostorima s različito definiranim normamama.

Primjer 3.1.2. *Neka je* $\left(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2\right)$ *normiran prostor. Odredimo centar para* x, y *za* $x = (-1, 0)$ *i* $y = (1, 0)$.
Znamo da je $\frac{1}{2}\|x - y\|_2 = \frac{1}{2}\|(-2, 0)\|_2 = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$. *Po definiciji je tada*

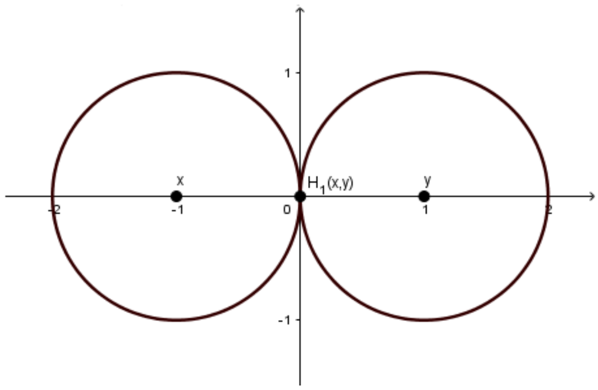
$$H_1(x, y) = \left\{u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 : \|x - u\|_2 = \|y - u\|_2 = 1\right\}.$$

Da bismo odredili sve $u \in \mathbb{R}^2$ *moramo riješiti sustav dviju jednadžbi s dvije nepoznanice kojeg dobivamo iz*

$$\|x - u\|_2 = 1$$

$$\|y - u\|_2 = 1.$$

Međutim, budući da ovaj prostor znamo predočiti u ravnini, dovršit ćemo primjer samo geometrijskom interpretacijom. Dakle, $H_1(x, y)$ *je skup svih točaka* $u \in \mathbb{R}^2$ *koje su od* x *udaljene za* 1 *i koje su od* y *udaljene za* 1. *To su kružnice oko* x *i oko* y *radijusa* 1. *Iz Slike 3.1 lako vidimo da se u presjeku tih dviju kružnica nalazi samo točka* $(0, 0)$, *pa po Lemi 3.1.1 zaključujemo da je za svaki* $n \in \mathbb{N}$ *skup* $H_n(x, y)$ *također jednočlan. Stoga je* $(0, 0)$ *centar para* x, y.



Slika 3.1: Centar para x, y je $(0, 0)$

Primjer 3.1.3. *Neka je* $\left(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty\right)$ *normiran prosotr. Odredimo centar para* x, y *za* $x = (-1, 0)$ *i* $y = (1, 0)$. *Znamo da je*

$$\frac{1}{2}\|x-y\|_\infty = \frac{1}{2}\max\{|-1-1|, |0-0|\} = \frac{1}{2}\max\{2, 0\} = \frac{1}{2}\cdot 2 = 1\,.$$

Po definiciji je tada

$$H_1(x,y) = \left\{u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 : \|x-u\|_\infty = \|y-u\|_\infty = 1\right\}\,.$$

Sada računamo $\|x-u\|_\infty$ *i* $\|y-u\|_\infty$ *kako bismo dobili uvjete na* u_1, u_2 *takve da* u *bude u skupu* $H_1(x,y)$. *Imamo*

$$\|x-u\|_\infty = \|(-1-u_1, 0-u_2)\|_\infty = \max\{|-1-u_1|, |0-u_2|\} = \max\{|u_1+1|, |u_2|\}\,.$$

Iz definicije skupa $H_1(x,y)$ *znamo da mora biti* $\|x-u\|_\infty = 1$*, pa zaključujemo da je*

$$\max\{|u_1+1|, |u_2|\} = 1\,,$$

a to znači da nijedan član skupa nije veći od 1. *Dakle,*

$$|u_1+1| \le 1 \quad i \quad |u_2| \le 1\,. \tag{3.1}$$

Analogno je

$$\|y-u\|_\infty = \max\{|u_1-1|, |u_2|\} = 1\,,$$

pa vrijedi

$$|u_1-1| \le 1 \quad i \quad |u_2| \le 1\,. \tag{3.2}$$

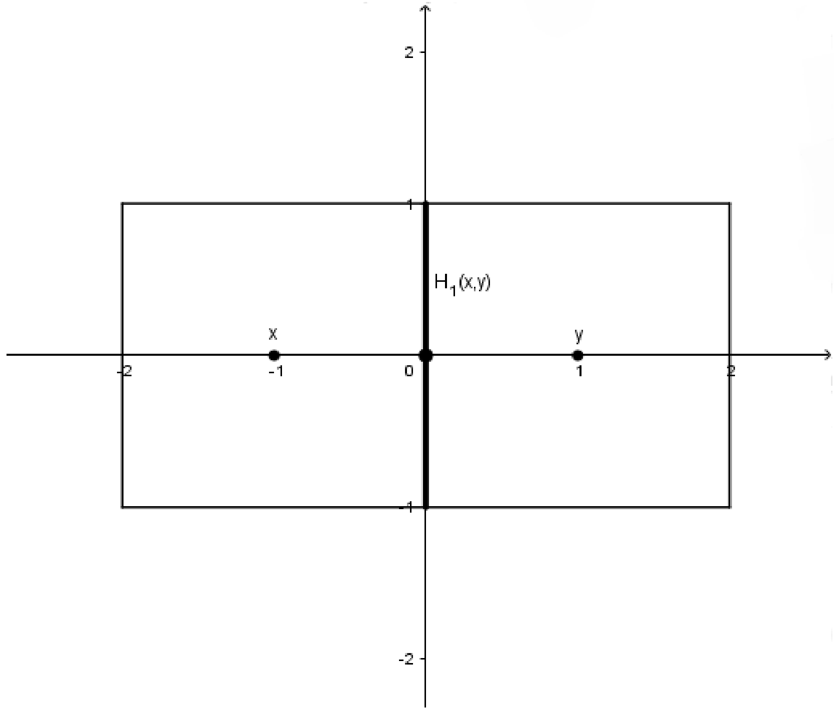
Računajući sustav nejednadžbi (3.1) - (3.2) *dobivamo da je* $u_1 = 0$ *i vrijedi* $-1 \le u_2 \le 1$*, a to znači da je*

$$H_1(x,y) = \left\{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 : u_1 = 0, u_2 \in [-1, 1]\right\}\,.$$

Skup $H_1(x,y)$ *možemo vidjeti na Slici 3.2 kao presjek kugala (u normi* $\|\cdot\|_\infty$*) oko* x *i* y *radijusa* 1.

Kako $H_1(x,y)$ *nije jednočlan, tražimo* $H_2(x,y)$. *Izračunajmo najprije dijametar skupa* $H_1(x,y)$*,*

$$\begin{aligned}\operatorname{diam}(H_1(x,y)) &= \sup\{\|u-v\|_\infty : u, v \in H_1(x,y)\}\\ &= \max\{0, |u_2 - v_2| : u_2, v_2 \in [-1, 1]\}\\ &= \max\{|u_2 - v_2| : u_2, v_2 \in [-1, 1]\} = 2\,.\end{aligned}$$



Slika 3.2: Skup $H_1(x, y)$

Po definiciji je sada

$$\begin{aligned} H_2 &= \left\{ u = (u_1, u_2) \in H_1(x, y) : \|u - v\|_\infty \leq \frac{1}{2}\mathrm{diam}(H_1(x, y)), v \in H_1(x, y) \right\} \\ &= \{(0, u_2) : u_2 \in [-1, 1], (\forall v_2 \in [-1, 1]) \quad \|(0, u_2 - v_2)\|_\infty \leq 1\} \, . \end{aligned}$$

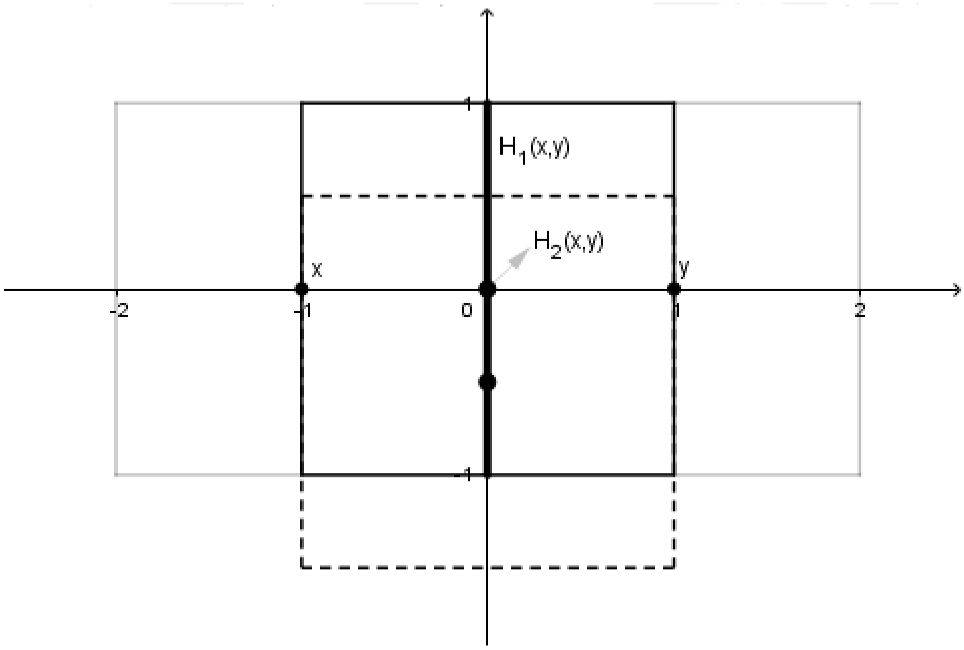
Uzmimo proizvoljan $u \in H_1(x, y)$ *i fiksirajmo ga. Tada za svaki* $v \in H_1(x, y)$ *mora biti* $\|u - v\|_\infty \leq 1$*, odnosno* $\max\{0, |u_2 - v_2|\} \leq 1$*, što znači da je* $|u_2 - v_2| \leq 1$*. Kako ovo mora vrijediti za svaki* $v \in H_1(x, y)$*, uzmimo* $v = (0, 1)$*. Tada iz* $|u_2 - 1| \leq 1$ *dobivamo da mora biti*

$$u_2 \geq 0 \quad i \quad u_2 \leq 2 \, . \tag{3.3}$$

Uzmimo sada $v = (0, -1)$*. Tada mora biti* $|u_2 + 1| \leq 1$*, što znači da je*

$$u_2 \leq 0 \quad i \quad u_2 \geq -2 \, . \tag{3.4}$$

Sada iz (3.3) *i* (3.4) *slijedi da je nužno* $u_2 = 0$*, a kako je* $u \in H_1(x, y)$*, to je i* $u_1 = 0$*. Dakle, mora biti* $u = (0, 0)$*. To znači da je* $H_2(x, y) = \{(0, 0)\}$*, a prema Lemi 3.1.1 je onda* $(0, 0)$ *centar para* x, y*.*
Geometrijski bi to značilo da je $(0, 0)$ *jedina točka u skupu* $H_1(x, y)$ *koja je središte jedinične kugle koja je cijela sadržana u uniji kugala oko x i y. Na Slici 3.3 je iscrtkano označena kugla oko* $(0, -0.5)$ *čije točke očito ne zadovoljavaju tražene uvjete pa se stoga* $(0, -0.5)$ *ne nalazi u* $H_2(x, y)$*, a slično zaključujemo i za sve ostale točke osim* $(0, 0)$*.*



Slika 3.3: Točka $(0, 0)$ je element skupa $H_2(x, y)$, a $(0, -0.5)$ nije

Slijedi još nekoliko pomoćnih tvrdnji vezanih uz centar para x, y.

Lema 3.1.4. *Za svaki* $n \in \mathbb{N}$ *vrijedi* $\operatorname{diam}(H_n(x, y)) \leq \frac{1}{2^{n-1}}\|x - y\|$.

Dokaz. Tvrdnju ćemo dokazati matematičkom indukcijom.
Po definiciji imamo $H_1(x, y) = \left\{u \in X : \|x - u\| = \|y - u\| = \frac{1}{2}\|x - y\|\right\}$. Zanima nas koliki

je $\operatorname{diam}(H_1(x,y))$. Neka su $u, v \in H_1(x,y)$. Tada je po svojstvima normiranog prostora

$$\begin{aligned}\|u-v\| &= \|u-v+x-x\| \\ &= \|(u-x)+(x-v)\|\,.\end{aligned}$$

Zbog nejednakosti trokuta je

$$\|(u-x)+(x-v)\| \leq \|u-x\| + \|x-v\| = \|x-u\| + \|x-v\|\,.$$

Primjenjujući definiciju prostora $H_1(x,y)$ je $\|x-u\| = \frac{1}{2}\|x-y\|$ i $\|x-v\| = \frac{1}{2}\|x-y\|$. Sada lako vidimo da je

$$\|u-v\| \leq \frac{1}{2}\|x-y\| + \frac{1}{2}\|x-y\| = \|x-y\|\,.$$

Dakle, za po volji odabrane $u, v \in H_1(x,y)$ je $\|u-v\| \leq \|x-y\|$ pa zaključujemo da je $\operatorname{diam}(H_1(x,y)) \leq \|x-y\|$.

Nadalje, po definiciji je $H_2(x,y) = \left\{u \in H_1(x,y) : \|u-v\| \leq \frac{1}{2}\operatorname{diam}(H_1(x,y)), v \in H_1(x,y)\right\}$.

Pogledajmo sada $\operatorname{diam}(H_2(x,y))$. Neka su $u_1, u_2 \in H_2(x,y)$. Tada je

$$\begin{aligned}\|u_1-u_2\| &\leq \frac{1}{2}\operatorname{diam}(H_1(x,y)) \\ &= \frac{1}{2}\|x-y\|\end{aligned}$$

iz čega slijedi da je $\operatorname{diam}(H_2(x,y)) \leq \frac{1}{2}\|x-y\|$. Time je pokazano da je baza matematičke indukcije ispunjena.

Pretpostavimo sada da za neki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $\operatorname{diam}(H_n(x,y)) \leq \frac{1}{2^{n-1}}\|x-y\|$ i promotrimo $\operatorname{diam}(H_{n+1}(x,y))$. Po definiciji je

$$H_{n+1}(x,y) = \left\{u \in H_n(x,y) : \|u-v\| \leq \frac{1}{2}\operatorname{diam}(H_n(x,y)), v \in H_n(x,y)\right\}\,.$$

Neka su $u_1, u_2 \in H_{n+1}(x,y)$. Tada imamo

$$\begin{aligned}\operatorname{diam}(H_{n+1}(x,y)) &\leq \|u_1-u_2\| \\ &\leq \frac{1}{2}\operatorname{diam}(H_n(x,y)) \\ &\leq \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^{n-1}}\|x-y\| \\ &\leq \frac{1}{2^n}\|x-y\|\,,\end{aligned}$$

pri čemu smo u drugoj nejednakosti koristili $u_1, u_2 \in H_{n+1}(x, y) \subseteq H_n(x, y)$, dok smo u trećoj nejednakosti primijenili pretpostavku.
Budući da tvrdnja vrijedi za bazu ($n = 1, n = 2$) i iz pretpostavke da vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$ slijedi da vrijedi za njegov sljedbenik $n + 1$, zaključujemo po principu matematičke indukcije da tvrdnja vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$. Dakle, $\operatorname{diam}(H_n(x, y)) \leq \frac{1}{2^{n-1}}\|x - y\|$. □

Korolar 3.1.5. *Presjek svih $H_n(x, y)$ je ili prazan skup ili jednočlan skup.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, to jest da postoje $u, v \in \bigcap_{n=1}^{\infty} H_n$. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ tada imamo $u, v \in H_n$. Po definiciji dijametra skupa je $\operatorname{diam}(H_n(x, y)) \geq \|u - v\|$, a prema prethodnoj Lemi 3.1.4 znamo da je $\operatorname{diam}(H_n(x, y)) \leq \frac{1}{2^{n-1}}\|x - y\|$. Sada zaključujemo da je za svaki $n \in \mathbb{N}$

$$\|u - v\| \leq \frac{1}{2^{n-1}}\|x - y\|\,.$$

Kako $\frac{1}{2^{n-1}}$ konvergira k nuli kada n teži beskonačnosti, slijedi $\|u - v\| = 0$, odnosno $u = v$. Dakle, $\bigcap_{n=1}^{\infty} H_n$ sadrži najviše jedan element. □

Lema 3.1.6. *Neka je X normiran prostor i $x, y \in X$. Tada je $\frac{1}{2}(x + y)$ centar para x, y.*

Dokaz. Za proizvoljni $u \in X$ definirajmo $\tilde{u} := x + y - u$. Znamo da je $\tilde{u} \in X$ jer je X vektorski prostor, a x, y, u su njegovi elementi.
Nadalje, ako je $u \in H_n(x, y)$, onda je $\tilde{u} \in H_n(x, y)$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Pokažimo tu tvrdnju matematičkom indukcijom.
Najprije, ako je $u \in H_1(x, y)$, onda je i $\tilde{u} \in H_1(x, y)$ jer je

$$\|\tilde{u} - x\| = \|x + y - u - x\| = \|y - u\|$$

i

$$\|\tilde{u} - y\| = \|x + y - u - y\| = \|x - u\|$$

pa je

$$\|\tilde{u} - x\| = \|\tilde{u} - y\| = \frac{1}{2}\|x - y\|\,,$$

odnosno $\tilde{u} \in H_1(x, y)$ Time je pokazana baza matematičke indukcije. Pretpostavimo da ako je $u \in H_{n-1}(x, y)$, onda je $\tilde{u} \in H_{n-1}(x, y)$, te pokažimo da iz toga slijedi da je $\tilde{u} \in H_n(x, y)$.
Neka je $u \in H_n(x, y)$. Uzmimo $v \in H_{n-1}(x, y)$. Po pretpostavci znamo da je tada i $\tilde{v} \in H_{n-1}(x, y)$. Sada imamo

$$\|\tilde{u} - v\| = \|x + y - u - v\| = \|x + y - v - u\| = \|\tilde{v} - u\|.$$

Budući da je $u \in H_n(x,y)$ i $\tilde{v} \in H_{n-1}(x,y)$, po definiciji vrijedi

$$\|\tilde{v} - u\| \leq \frac{1}{2}\mathrm{diam}(H_{n-1}(x,y)),$$

odnosno

$$\|\tilde{u} - v\| \leq \frac{1}{2}\mathrm{diam}(H_{n-1}(x,y)),$$

što znači da je $\tilde{u} \in H_n(x,y)$.
Budući da tvrdnja vrijedi za bazu i iz pretpostavke da vrijedi za neki $n-1 \in \mathbb{N}$ slijedi da vrijedi za njegov sljedbenik n, zaključujemo po principu matematičke indukcije da tvrdnja vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$. Dakle, ako je $u \in H_n(x,y)$, onda je $\tilde{u} \in H_n(x,y)$, za svaki $n \in \mathbb{N}$.
Pokažimo sada da je $z = \frac{1}{2}(x+y) \in H_n(x,y)$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Tu ćemo tvrdnju također pokazati matematičkom indukcijom.
Lako vidimo da tvrdnja vrijedi za bazu, to jest da je $z \in H_1(x,y)$ jer

$$\|z - x\| = \left\|\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - x\right\| = \left\|\frac{1}{2}y - \frac{1}{2}x\right\| = \frac{1}{2}\|y - x\| = \frac{1}{2}\|x - y\|$$

i

$$\|z - y\| = \left\|\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - y\right\| = \left\|\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y\right\| = \frac{1}{2}\|x - y\|.$$

Dakle, $\|z - x\| = \|z - y\| = \frac{1}{2}\|x - y\|$.
Pretpostavimo da je $z \in H_{n-1}(x,y)$, za neki $n \in \mathbb{N}$ i pokažimo da je tada $z \in H_n(x,y)$.
Neka je $u \in H_{n-1}(x,y)$. Tada je $\tilde{u} \in H_{n-1}(x,y)$ po netom dokazanoj tvrdnji. Sada imamo

$$2\|z - u\| = 2\left\|\frac{1}{2}(x+y) - u\right\| = \|x + y - 2u\| = \|\tilde{u} - u\|.$$

Budući da su $\tilde{u}, u \in H_{n-1}(x,y)$, njihova udaljenost ne može biti veća od dijametra skupa u kojem se nalaze, odnosno imamo $\|\tilde{u} - u\| \leq \mathrm{diam}(H_{n-1}(x,y))$. Kako je

$$2\|z - u\| = \|\tilde{u} - u\|,$$

to je

$$2\|z - u\| \leq \mathrm{diam}(H_{n-1}(x,y)),$$

odnosno

$$\|z - u\| \leq \frac{1}{2}\mathrm{diam}(H_{n-1}(x,y)).$$

No, to znači da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $z \in H_n(x,y)$, odnosno $z \in \bigcap_{n=1}^{\infty} H_n$. Prema prethodnom Korolaru 3.1.5 je onda nužno $\bigcap_{n=1}^{\infty} H_n = \{z\}$ što znači da je z centar para x, y. □

3.2 Dokaz Mazur - Ulamovog teorema

Lema 3.2.1. *Ako je T surjektivna izometrija s normiranog prostora X na normirani prostor Y, onda T preslikava centar para x, y u X u centar para $T(x), T(y)$ u Y.*

Dokaz. Po Lemi 3.1.6 znamo da je $\left(\frac{1}{2}(x+y)\right)$ centar para x, y, dok je $\left(\frac{1}{2}\left(T(x)+T(y)\right)\right)$ centar para $T(x), T(y)$. Dakle, potrebno je pokazati da je $T\left(\frac{1}{2}(x+y)\right) = \frac{1}{2}\left(T(x)+T(y)\right)$.
Dokažimo najprije da su skupovi $T(H_n(x,y))$ i $H_n(T(x),T(y))$ jednaki. Dokaz ćemo provesti matematičkom indukcijom.
Da bi vrijedila baza, treba pokazati da je $T(H_1(x,y)) = H_1(T(x),T(y))$.
Pokažimo najprije $T(H_1(x,y)) \subseteq H_1(T(x),T(y))$. Neka je $u \in H_1(x,y)$ proizvoljan. Tada je $T(u) \in T(H_1(x,y))$. Kako je T izometrija, znamo da je

$$\|T(u) - T(x)\| = \|u - x\|\,.$$

No, $u \in H_1(x,y)$, pa je

$$\|u - x\| = \frac{1}{2}\|x - y\|\,.$$

Iskoristimo opet da je T izometrija pa imamo da je

$$\|u - x\| = \frac{1}{2}\|T(x) - T(y)\|\,,$$

odnosno

$$\|T(u) - T(x)\| = \frac{1}{2}\|T(x) - T(y)\|\,.$$

Analogno se pokaže da je

$$\|T(u) - T(y)\| = \frac{1}{2}\|T(x) - T(y)\|\,.$$

Dakle,

$$\|T(u) - T(x)\| = \|T(u) - T(y)\| = \frac{1}{2}\|T(x) - T(y)\|$$

pa je $T(u) \in H_1(T(x),T(y))$.
Pokažimo sada obratnu inkluziju, $H_1(T(x),T(y)) \subseteq T(H_1(x,y))$. Neka je $\mu \in H_1(T(x),T(y))$ proizvoljan. Budući da je T surjekcija i znamo da je T izometrija što znači da je injekcija, to postoji jedinstveni $u \in X$ takav da je $T(u) = \mu$. Trebamo pokazati da je ujedno $u \in H_1(x,y)$. Kako je T izometrija, znamo da je

$$\frac{1}{2}\|x - y\| = \frac{1}{2}\|T(x) - T(y)\|$$

što je jednako $\|\mu - T(x)\|$ jer je $\mu \in H_1(T(x), T(y))$. No, kako postoji u takav da je $T(u) = \mu$ i on je jedinstven, to je

$$\|\mu - T(x)\| = \|T(u) - T(x)\|.$$

Jer je T izometrija,

$$\|T(u) - T(x)\| = \|u - x\|,$$

a zbog svojstva normiranog prostora, to je jednako $\|x - u\|$. Pogledamo li početak i kraj, vidimo da je

$$\frac{1}{2}\|x - y\| = \|x - u\|.$$

Analogno se pokaže i da je

$$\frac{1}{2}\|x - y\| = \|y - u\|$$

što onda znači da je $u \in H_1(x, y)$, a to je i trebalo pokazati. Dakle,

$$T(H_1(x, y)) = H_1(T(x), T(y)).$$

Budući da je T izometrija, vrijedi $\mathrm{diam}(H_1(x, y)) = \mathrm{diam}(T(H_1(x, y)))$, a onda i

$$\mathrm{diam}(H_1(x, y)) = \mathrm{diam}(T(H_1(x, y))) = \mathrm{diam}(H_1(T(x), T(y))).$$

Pretpostavimo sada da za neki $n \geq 2$ vrijedi

$$T(H_{n-1}(x, y)) = H_{n-1}(T(x), T(y)).$$

Kao i gore sada trivijalno slijedi $\mathrm{diam}(H_{n-1}(x, y)) = \mathrm{diam}(H_{n-1}T(x), T(y))$. Pokažimo da tada vrijedi $T(H_n(x, y)) = H_n(T(x), T(y))$. Opet imamo skupovnu jednakost, pa pokažimo najprije jednu inkluziju, $T(H_n(x, y)) \subseteq H_n(T(x), T(y))$. Zapravo treba pokazati da je $T(u) \in H_n(T(x), T(y))$ za proizvoljni $u \in H_n(x, y)$. Po definiciji je

$$\begin{aligned} H_n(T(x), T(y)) = \Big\{ & \mu \in H_{n-1}(T(x), T(y)) : \\ & \|\mu - \xi\| \leq \frac{1}{2}\mathrm{diam}(H_{n-1}(T(x), T(y))), \xi \in H_{n-1}(T(x), T(y)) \Big\}. \end{aligned}$$

Uzmimo proizvoljan $\xi \in H_{n-1}(T(x), T(y))$. Po pretpostavci znamo da je $T(H_{n-1}(x, y)) = H_{n-1}(T(x), T(y))$, a kako je T injekcija, postoji jedinstveni $v \in H_{n-1}(x, y)$ takav da je $T(v) = \xi$. Zbog toga je

$$\|T(u) - \xi\| = \|T(u) - T(v)\|.$$

Kako je T izometrija, to je

$$\|T(u) - T(v)\| = \|u - v\|.$$

Jer je $u \in H_n$ i $v \in H_{n-1}$, po definiciji je

$$\|u - v\| \leq \frac{1}{2}\mathrm{diam}(H_{n-1}(x, y))$$

što je po pretpostavci jednako $\frac{1}{2}\mathrm{diam}(H_{n-1}(T(x), T(y)))$. Dakle,

$$\|T(u) - \xi\| \leq \frac{1}{2}\mathrm{diam}(H_{n-1}(T(x), T(y)))$$

što je i trebalo pokazati.
Pokažimo sada obratnu inkluziju, $H_n(T(x), T(y)) \subseteq T(H_n(x, y))$. Neka je $\mu \in H_n(T(x), T(y))$ proizvoljan. Pokažimo da je tada $\mu \in T(H_n(x, y))$. Budući da je T surjekcija i injekcija, postoji jedinstveni $u \in X$ takav da je $T(u) = \mu$, pa je dovoljno pokazati da je $u \in H_n(x, y)$. Neka je $v \in H_{n-1}(x, y)$. Tada je $T(v) \in T(H_{n-1}(x, y))$, a po pretpostavci je $T(H_{n-1}(x, y)) = H_{n-1}(T(x), T(y))$. Sada iz $\mu = T(u) \in H_n(x, y)$ i definicije skupa $H_n(x, y)$ slijedi

$$\|T(u) - T(v)\| \leq \frac{1}{2}\mathrm{diam}(H_{n-1}(T(x), T(y)))\,.$$

Iskoristimo pretpostavku i sjetimo se da je T izometrija, pa dobivamo

$$\|u - v\| \leq \frac{1}{2}\mathrm{diam}(H_{n-1}(x, y))$$

što znači da je $u \in H_n(x, y)$.
Dakle, $H_n(x, y)$ se izometrijom T preslika u $H_n(T(x), T(y))$.
Pokažimo sada da je $T\left(\frac{1}{2}(x + y)\right) = \frac{1}{2}(T(x) + T(y))$, odnosno da se centar para x, y preslikava u centar para $T(x), T(y)$. Prema Lemi 3.1.6 je za svaki $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{2}(x + y) \in H_n(x, y)\,,$$

pa je i $T\left(\frac{1}{2}(x + y)\right) \in T(H_n(x, y))$. Također, prema istoj lemi je

$$\frac{1}{2}(T(x) + T(y)) \in H_n(T(x), T(y))\,.$$

No,

$$T(H_n(x, y)) = H_n(T(x), T(y))\,,$$

pa je za svaki $n \in \mathbb{N}$

$$T\left(\frac{1}{2}(x + y)\right) \in H_n(T(x), T(y))\,.$$

Zbog jedinstvenosti centra imamo $T\left(\frac{1}{2}(x+y)\right) = \frac{1}{2}(T(x)+T(y))$.

□

Lema 3.2.2. *Ako je T surjektivna izometrija s normiranog prostora X na normirani prostor Y, onda vrijedi*

i) $T(x+y) = T(x) + T(y) - T(0)$

ii) $T(ax) = aT(x) + (1-a)T(0)$, *za svaki* $a \in \mathbb{R}$.

Dokaz. Dokažimo najprije prvu tvrdnju. Neka je $x \in X$ proizvoljan. Budući da je X normiran prostor, znamo da vrijedi $x = \frac{1}{2}(2x+0)$. No, to znači da je i $T(x) = T\left(\frac{1}{2}(2x+0)\right)$. Prema Lemi 3.2.1 znamo da je

$$T\left(\frac{1}{2}(2x+0)\right) = \frac{1}{2}(T(2x)+T(0))\,.$$

Sada iz $T(x) = \frac{1}{2}(T(2x)+T(0))$ lako slijedi da je

$$T(2x) = 2T(x) - T(0)\,. \tag{3.5}$$

Nadalje, znamo da je $x+y = \frac{1}{2}(2x+2y)$, pa je i

$$T(x+y) = T\left(\frac{1}{2}(2x+2y)\right)\,,$$

a po Lemi 3.2.1 je

$$T\left(\frac{1}{2}(2x+2y)\right) = \frac{1}{2}(T(2x)+T(2y))\,.$$

Sada imamo

$$T(x+y) = \frac{1}{2}(T(2x)+T(2y))$$

što je ekvivalentno s

$$2T(x+y) = T(2x)+T(2y)\,.$$

Iskoristimo li (3.5), vidimo da je

$$2T(x+y) = 2T(x) - T(0) + 2T(y) - T(0)\,,$$

odnosno

$$T(x+y) = T(x) + T(y) - T(0)\,.$$

Dokaz drugog dijela tvrdnje teorema provest ćemo u četiri koraka. Najprije ćemo pokazati da tvrdnja vrijedi za sve prirodne brojeve, zatim za 0 i -1 iz čega će slijediti da tvrdnja vrijedi za sve cijele brojeve. Treći je korak pokazati da vrijedi za sve racionalne brojeve, te na kraju po gustoći tvrdnju proširujemo na realne brojeve.

1. korak: *prirodni brojevi*

Dokaz da tvrdnja vrijedi za sve prirodne brojeve provest ćemo matematičkom indukcijom.
Baza vrijedi jer za $a = 1$ imamo

$$T(1x) = T(x) = 1 \cdot T(x) + 0 = 1 \cdot T(x) + (1-1)T(0)\,.$$

Pretpostavimo da za neki $a \in \mathbb{N}$ vrijedi $T(ax) = aT(x) + (1-a)T(0)$ i pokažimo da za $a+1$ vrijedi $T((a+1)x) = (a+1)T(x) + (-a)T(0)$. Budući da je X normiran prostor, znamo da je

$$T((a+1)x) = T(ax+x)\,.$$

Prema dokazanom prvom dijelu tvrdnje teorema je

$$T(ax+x) = T(ax) + T(x) - T(0)$$

što je po pretpostavci jednako $aT(x) + (1-a)T(0) + T(x) - T(0)$. Sada dobivamo

$$T((a+1)x) = (a+1)T(x) + (-a)T(0)\,,$$

a to je i trebalo pokazati.

2. korak: *cijeli brojevi*

Za $a = 0$ imamo sljedeći niz ekvivalencija

$$\begin{aligned} &T(0x) = 0T(x) + (1-0)T(0) \\ &\Leftrightarrow T(0) = 0 + 1 \cdot T(0) \\ &\Leftrightarrow T(0) = T(0)\,. \end{aligned}$$

Time zaključujemo da tvrdnja vrijedi za $a = 0$.

Za $a = -1$ treba pokazati $T(-x) = -T(x) + 2T(0)$. Kako je $T(0) = T(x + (-x))$, možemo iskoristiti prvi dio tvrdnje teorema, pa imamo da je

$$T(0) = T(x) + T(-x) - T(0)\,.$$

No, to je upravo ekvivalentno

$$T(-x) = -T(x) + 2T(0)$$

što je i trebalo pokazati.

Pokažimo sada da za svaki $a \in \mathbb{Z}$ vrijedi $T(ax) = aT(x) + (1-a)T(0)$. Kako smo već pokazali tvrdnju za prirodne brojeve i nulu, uzmimo da je $a < 0$. Koristeći najprije tvrdnju za -1, a potom za prirodne brojeve, dobivamo

$$\begin{aligned}T(ax) =& T(-(-ax))\\ =& -T((-a)x) + 2T(0)\\ =& -\Big((-a)T(x) + (1-(-a))T(0)\Big) + 2T(0)\\ =& aT(x) + (-1-a+2)T(0) = aT(x) + (1-a)T(0)\,,\end{aligned}$$

što je i trebalo pokazati.

3. korak: *racionalni brojevi*

Neka je a racionalan broj, $a = \frac{m}{n}$, gdje je $m \in \mathbb{Z}$, a $n \in \mathbb{N}$. Zbog toga što je X normiran prostor, vrijedi da je $T(x) = T\left(n \cdot \frac{x}{n}\right)$. Po dokazanoj drugoj tvrdnji teorema za prirodne brojeve, imamo

$$T(x) = nT\left(\frac{x}{n}\right) + (1-n)T(0)\,,$$

odnosno

$$T\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{1}{n}T(x) + \left(1 - \frac{1}{n}\right)T(0)\,. \tag{3.6}$$

Nadalje, $T\left(\frac{m}{n}x\right) = T\left(m\frac{x}{n}\right)$, a po dokazanoj drugoj tvrdnji teorema za cijele brojeve je

$$T\left(m\frac{x}{n}\right) = mT\left(\frac{x}{n}\right) + (1-m)T(0)\,.$$

Primijenimo li (3.6) na tu jednakost, dobivamo

$$T\left(\frac{m}{n}x\right) = m\left(\frac{1}{n}T(x) + \left(1-\frac{1}{n}\right)T(0)\right) + (1-m)T(0)\,.$$

Sređivanjem dobivamo traženu tvrdnju:

$$\begin{aligned}T\left(\frac{m}{n}x\right) =& m\left(\frac{1}{n}T(x) + \left(1-\frac{1}{n}\right)T(0)\right) + (1-m)T(0)\\ =& \frac{m}{n}T(x) + mT(0) - \frac{m}{n}T(0) + T(0) - mT(0)\\ =& \frac{m}{n}T(x) + \left(1 - \frac{m}{n}\right)T(0).\end{aligned}$$

4. korak: *realni brojevi*

Neka je $a \in \mathbb{R}$. Budući da je skup $\mathbb{Q}$ gust u $\mathbb{R}$, znamo da za svaki realan broj a postoji niz racionalnih brojeva a_n takvih da je

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a\,. \tag{3.7}$$

Po prethodno dokazanoj tvrdnji za racionalne brojeve znamo da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $T(a_n x) = a_n T(x) + (1 - a_n)T(0)$. Pokažimo da $a_n T(x)$ konvergira k $aT(x)$ u prostoru X. Po definiciji konvergencije niza u normiranom prostoru znamo da niza $a_n T(x)$ konvergira k $aT(x)$ ako je

$$\lim_{n\to\infty} \|a_n T(x) - aT(x)\| = 0\,.$$

No,

$$\|a_n T(x) - aT(x)\| = \|(a_n - a)T(x)\| = |a_n - a|\,\|T(x)\|$$

zbog svojstva normiranog prostora. Znamo prema (3.7) da $a_n - a$ konvergira k nuli kad n konvergira k beskonačno, pa stoga imamo

$$\lim_{n\to\infty} \|a_n T(x) - aT(x)\| = 0 \cdot \|T(x)\| = 0 \tag{3.8}$$

što je i trebalo pokazati.
Analogno se pokaže da je

$$\lim_{n\to\infty} \|(1 - a_n)T(0) - (1 - a)T(0)\| = 0 \tag{3.9}$$

što znači da $(1 - a_n)T(0)$ konvergira k $(1 - a)T(0)$ u prostoru X.
Još je preostalo pokazati da $T(a_n x)$ konvergira k $T(ax)$ u prostoru X. Budući da je T izometrija, znamo da vrijedi

$$\|T(a_n x) - T(ax)\| = \|a_n x - ax\|\,,$$

a kako se radi o normiranom prostoru, znamo da je

$$\|a_n x - ax\| = |a_n - a|\,\|x\|\,.$$

Opet, prema (3.7) znamo da $a_n - a$ konvergira k nuli kad n konvergira k beskonačno, pa je

$$\lim_{n\to\infty} \|T(a_n x) - T(ax)\| = 0\,, \tag{3.10}$$

a to je i trebalo pokazati.
Sada kada smo pokazali da limesi (3.8), (3.9) i (3.10) postoje, možemo zaključiti da je

$$\begin{aligned} T(ax) &= \lim_{n\to\infty} T(a_n x) \\ &= \lim_{n\to\infty} (a_n T(x) + (1 - a_n)T(0)) \\ &= \lim_{n\to\infty} (a_n T(x)) + \lim_{n\to\infty} (1 - a_n)T(0) \\ &= aT(x) + (1 - a)T(0) \end{aligned}$$

odnosno da za svaki $a \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$T(ax) = aT(x) + (1 - a)T(0)\,.$$

□

Teorem 3.2.3 (Mazur - Ulam)**.** *Ako je T surjektivna izometrija s realnog normiranog prostora X na realni normirani prostor Y i ako je $T(0) = 0$, onda je T linearan operator.*

Dokaz. Da bismo pokazali da je T linearan operator, moramo pokazati da je funkcija aditivna i homogena. Aditivnost znači da je $T(x + y) = T(x) + T(y)$. Iz leme 3.2.2 znamo da je $T(x + y) = T(x) + T(y) - T(0)$. No, kako je $T(0) = 0$, to je $T(x + y) = T(x) + T(y)$ čime je aditivnost pokazana. Homogenost znači da je $T(ax) = aT(x)$, za svaki $a \in \mathbb{R}$. Iz leme 3.2.2 znamo da je $T(ax) = aT(x) + (1 - a)T(0)$, a kako je $T(0) = 0$, to je $T(ax) = aT(x)$ čime je homogenost pokazana. Dakle, T je linearan operator. □

Korolar 3.2.4. *Neka je $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ surjektivna izometrija. Tada postoji jedinstvena $n \times n$ ortogonalna matrica U i vektor $x_0 \in \mathbb{R}^n$ takvi da je $Tx = Ux + x_0$, $x \in \mathbb{R}^n$*

Dokaz. Po prethodnom teoremu je $T - T(0)$ linearan operator. Kako je T izometrija, $T - T(0)$ je također izometrija pa je $T - T(0)$ unitaran operator. Sada za U uzmemo matrični prikaz operatora $T - T(0)$ te $x_0 := T(0)$. □

3.3 Neki primjeri

Sada ćemo dati dva primjera u kojima ćemo pokazati da su za linearnost nužni svi uvjeti teorema.

Primjer 3.3.1. *Naka su $X = (\mathbb{R}, |\cdot|)$ i $Y = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ normirani prostori, te neka je $T : X \to Y$ zadana s $T(x) = (x, \sin x)$. Tada je T izometrija s realnog normiranog prostora u realan normiran prostor i $T(0) = 0$, ali T nije linearan operator. To nije u kontradikciji s Teoremom 3.2.3 jer T nije surjekcija. U nastavku primjera precizno pokazujemo navedena svojstva preslikavanja T. Dokažimo najprije da je T izometrija, to jest da je $\|T(x) - T(y)\|_\infty = |x - y|$. Po definiciji norme $\|\cdot\|_\infty$ je*

$$\|T(x) - T(y)\|_\infty = \max\{|x - y|, |\sin x - \sin y|\}\,.$$

Pokažimo da za svaki $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi $|\sin x - \sin y| \le |x - y|$. Prema Lagrangeovom teoremu srednje vrijednosti za $x, y \in \mathbb{R}$ postoji $c \in \mathbb{R}$ takav da je $\sin x - \sin y = \cos c\,(x - y)$. Time dobivamo

$$|\sin x - \sin y| = |\cos c\,(x - y)| = |\cos c|\,|x - y| \le |x - y|\,,$$

pri čemu smo koristili da je $|\cos c| \leq 1$. *Stoga je* $\|T(x) - T(y)\|_\infty = |x - y|$.
Očito je $T(0) = (0, 0)$ *jer je* $\sin(0) = 0$.

Da bi T *bila surjekcija, mora za svaki* $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ *postojati* $x \in \mathbb{R}$ *takav da je* $T(x) = (x_1, x_2)$. *Međutim, za* $-1 > x_2 > 1$ *ne postoji* $x \in \mathbb{R}$ *takav da je* $\sin x = x_2$ *jer je sinus ograničena funkcija. Drugim riječima,* $T(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R} \times [-1, 1] \subset \mathbb{R}^2$.

Da bi T *bio linearan operator, mora za svaki* $x, y \in \mathbb{R}$ *i za svaki* $\alpha \in \mathbb{R}$ *biti*

$$T(x + y) = T(x) + T(y) \quad i \quad T(\alpha x) = \alpha T(x)\,.$$

Pokažimo na kontraprimjeru da to nije. Naime, za $\alpha = 2$ *i* $x = \dfrac{\pi}{2}$ *imamo*

$$T(\alpha x) = T\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = T(\pi) = (\pi, \sin \pi) = (\pi, 0)$$

i

$$\alpha T(x) = 2T\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\left(\frac{\pi}{2}, \sin\frac{\pi}{2}\right) = 2\left(\frac{\pi}{2}, 1\right) = (\pi, 2)$$

što je očito različito. Dakle, ne vrijedi homogenost pa zaključujemo da T *nije linearan operator.*

Primjer 3.3.2. *Neka su* $X = Y = (\mathbb{C}^2, \|\cdot\|)$ *normirani prostori, te neka je* $T : X \to Y$ *zadana s* $T(z_1, z_2) = (z_1, \overline{z_2})$. *Tada je* T *surjektivna izometrija s normiranog prostora na normiran prostor i* $T(0) = 0$, *ali* X *i* Y *nisu realni prostori pa po Teoremu 3.2.3 ne slijedi da je* T *linearan operator.*

Pokažimo da je zaista T *izometrija, to jest da je* $\|T(x) - T(y)\| = \|x - y\|$, *pri čemu je* $x = (z_1, z_2)$ *i* $y = (w_1, w_2)$. *Imamo*

$$\begin{aligned}
\|T(z_1, z_2) - T(w_1, w_2)\| &= \|(z_1, \overline{z_2}) - (w_1, \overline{w_2})\| \\
&= \|(z_1 - w_1, \overline{z_2} - \overline{w_2})\| \\
&= \sqrt{|z_1 - w_1|^2 + |\overline{z_2} - \overline{w_2}|^2} \\
&= \sqrt{|z_1 - w_1|^2 + |z_2 - w_2|^2} \\
&= \|(z_1 - w_1, z_2 - w_2)\| \\
&= \|(z_1, z_2) - (w_1, w_2)\|\,.
\end{aligned}$$

Pri tome smo kod treće jednakosti koristili definiciju norme u prostoru $(\mathbb{C}^2, \|\cdot\|)$, *a kod četvrte svojstva kompleksnih brojeva:* $\overline{z_2} - \overline{w_2} = \overline{z_2 - w_2}$ *i* $|\overline{z_2 - w_2}| = |z_2 - w_2|$. *Nakon toga smo opet uočili definiciju norme i na kraju razliku vektora.*

Da bismo pokazali da je T surjekcija, mora za svaki $(w_1, w_2) \in \mathbb{C}^2$ *postojati* $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ *takav da je* $T(z_1, z_2) = (w_1, w_2)$. *Uzmimo proizvoljan* $(w_1, w_2) \in \mathbb{C}^2$. *Tada je* $T(w_1, \overline{w_2}) = (w_1, w_2)$ *jer je* $\overline{\overline{w_2}} = w_2$.

Očito je $T(0, 0) = (0, 0)$ *jer je* $\overline{0} = 0$.

Da bi T bio linearan operator, mora za svaki $x, y \in \mathbb{C}^2$ *i za svaki* $\alpha \in \mathbb{C}$ *biti*

$$T(x + y) = T(x) + T(y) \quad i \quad T(\alpha x) = \alpha T(x)\,.$$

Pokažimo na kontraprimjeru da to nije. Neka je $x = (1, 1)$ *i* $\alpha = i$, *gdje smo s i označili imaginarnu jedinicu. Tada je*

$$T(\alpha x) = T(i(1, 1)) = T(i, i) = (i, -i)$$

i

$$\alpha T(x) = iT(1, 1) = i(1, 1) = (i, i)$$

što je očito različito. Dakle, T nije homogen, pa nije niti linearan.

Poglavlje 4

Krivulje drugog reda i transformacija koordinata

U ovom nam je poglavlju cilj jednadžbu oblika $ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ kojom je dana krivulja drugog reda (ili degenerirani oblik) svesti na kanonski oblik. To ćemo postići zamjenom varijabli. Zamjena varijabli treba biti regularna (bijektivna) i čuvati udaljenosti (izometrija) pa će po Korolaru 3.2.4 biti nužno kompozicija unitarnog operatora i translacije. Provest ćemo analizu na dva primjera koja se mogu pronaći u [4] u kojoj ćemo odrediti o kojoj se krivulji drugog reda radi te ćemo konstruirati izometriju kojom krivulju transformiramo u kanonski oblik. Pri rješavanju primjera koristit ćemo notaciju i tvrdnje iz [1] gdje se može pročitati nešto detaljnije o spektru, te iz [5] gdje je opisana klasifikacija krivulja drugog reda s obzirom na determinantu pridružene matrice.

4.1 Primjer: elipsa

Dana je jednadžba

$$5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0\,, \tag{4.1}$$

koja određuje krivulju drugog reda. Želimo zamjenom varijabli svesti (4.1) na kanonski oblik $\alpha^2 x + \beta^2 y + \gamma = 0$, za neke $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Zapišimo najprije jednadžbu u matričnom obliku

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -32 \\ -56 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 80 = 0\,,$$

pri čemu nam ovdje $\cdot$ označava (realni) skalarni produkt u $\mathbb{R}^2$ (odnosno $M_{21}(\mathbb{R})$). Definirajmo

$$A := \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$$

i odredimo svojstveni polinom matrice A. Imamo

$$\begin{aligned} k_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 8-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (5-\lambda)(8-\lambda) - 4 \\ &= \lambda^2 - 13\lambda + 36 \\ &= (\lambda - 9)(\lambda - 4)\,. \end{aligned}$$

Dakle, $\sigma(A) = \{4, 9\}$. Kako su svojstvene vrijednosti istog predznaka, imamo $\det A = \lambda_1\lambda_2 > 0$ pa po [5, §2, Teorem 6] očekujemo da (4.1) određuje elipsu. Odredimo sada svojstvene vektore.
Za svojstvenu vrijednost $\lambda_1 = 4$ moramo riješiti pripadajući homogeni sustav jednadžbi čiji je matrični zapis

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Lako vidimo da je $x = -2y$. Dakle, vektor $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ je svojstveni vektor svojstvene vrijednosti 4. Analogno, za svojstvenu vrijednost $\lambda_2 = 9$ rješavamo homogeni sustav

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix},$$

čime dobivamo da je $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ traženi svojstveni vektor. Ortonormiranjem prethodnih svojstvenih vektora dobivamo ortonormiranu bazu $\{v_1, v_2\}$, gdje su

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2}} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 2^2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Zaključujemo da je ortogonalna matrica

$$S = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

matrica prijelaza, odnosno vrijedi

$$A = S \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} S^T.$$

Uočimo sada da je

$$A\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\left(S\begin{bmatrix}4&0\\0&9\end{bmatrix}S^T\right)\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}4&0\\0&9\end{bmatrix}\left(S^T\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)\cdot\left(S^T\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right).$$

Uzmimo

$$\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=S^T\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix},$$

odnosno

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=S\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}.$$

Zamijenimo varijablu u gornjem izrazu pa imamo

$$A\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&0\\0&9\end{bmatrix}\left(S^T\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)\cdot\left(S^T\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)$$
$$=\begin{bmatrix}4&0\\0&9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}4x'\\9y'\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}$$
$$=4(x')^2+9(y')^2.$$

Zamijenimo varijablu i u linearnom dijelu promatrane jednadžbe:

$$\begin{bmatrix}-32\\-56\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-32\\-56\end{bmatrix}\cdot\left(S\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}\right)$$
$$=S^T\begin{bmatrix}-32\\-56\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}-2&1\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-32\\-56\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}8\\-144\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{5}}(8x'-144y').$$

Sada jednadžbu (4.1) možemo zapisati u sljedećem obliku

$$5x^2+4xy+8y^2-32x-56y+80=4(x')^2+9(y')^2+\frac{1}{\sqrt{5}}(8x'-144y')+80=0.$$

Preostalo je eliminirati linearni član. To radimo nadopunjavanjem do potpunog kvadrata

$$\begin{aligned}4(x')^2 + \frac{8}{\sqrt{5}}x' &= 4\left((x')^2 + 2\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{5} - \frac{1}{5}\right)\\ &= 4\left(\left(x' + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 - \frac{1}{5}\right)\\ &= 4\left(x' + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 - \frac{4}{5},\end{aligned}$$

te

$$\begin{aligned}9(y')^2 - \frac{144}{\sqrt{5}}y' &= 9\left((y')^2 - 2\cdot\frac{8}{\sqrt{5}}y' + \frac{64}{5} - \frac{64}{5}\right)\\ &= 9\left(\left(y' - \frac{8}{\sqrt{5}}\right)^2 - \frac{64}{5}\right)\\ &= 9\left(y' - \frac{8}{\sqrt{5}}\right)^2 - \frac{576}{5}.\end{aligned}$$

Uzimajući

$$\begin{aligned}x'' &= x' + \frac{1}{\sqrt{5}}\\ y'' &= \frac{8}{\sqrt{5}} - y',\end{aligned}$$

jednadžba (4.1) poprima oblik

$$4(x'')^2 + 9(y'')^2 - 36 = 0,$$

ili ekvivalentno

$$\frac{(x'')^2}{9} + \frac{(y'')^2}{4} = 1, \tag{4.2}$$

dok je konačna zamjena varijabli dana s

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}x''\\ y''\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}1\\ 8\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}S^T\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}1\\ 8\end{bmatrix}\\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}-2 & 1\\ -1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}1\\ 8\end{bmatrix},\end{aligned}$$

a definiramo li

$$R := \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix},$$

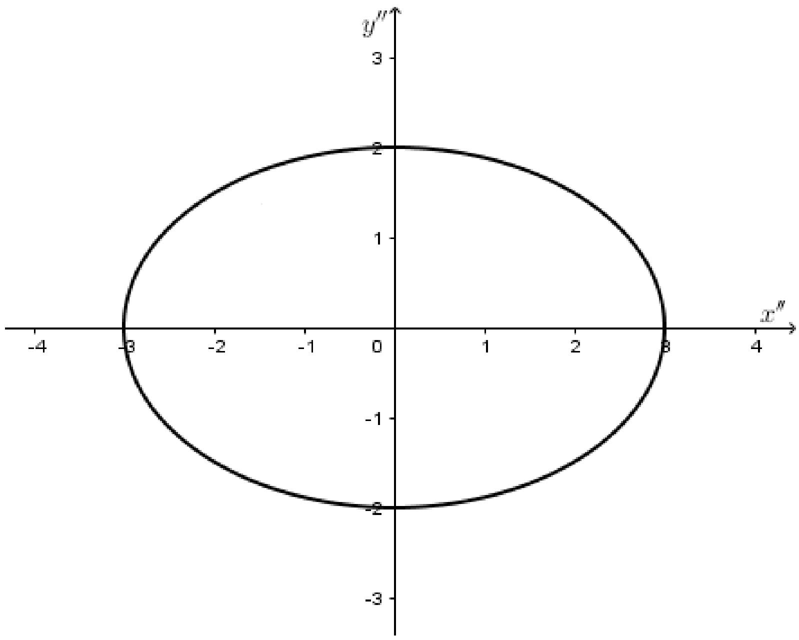
dobivamo

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = R^T \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} - \frac{1}{\sqrt{5}} R^T \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \end{bmatrix},$$

odnosno

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}. \tag{4.3}$$

Iz (4.2) vidimo sada da je krivulja dana formulom (4.1) uistinu elipsa, te u transformiranom koordinatnom sustavu $x''y''$ ona izgleda kao na Slici 4.1.

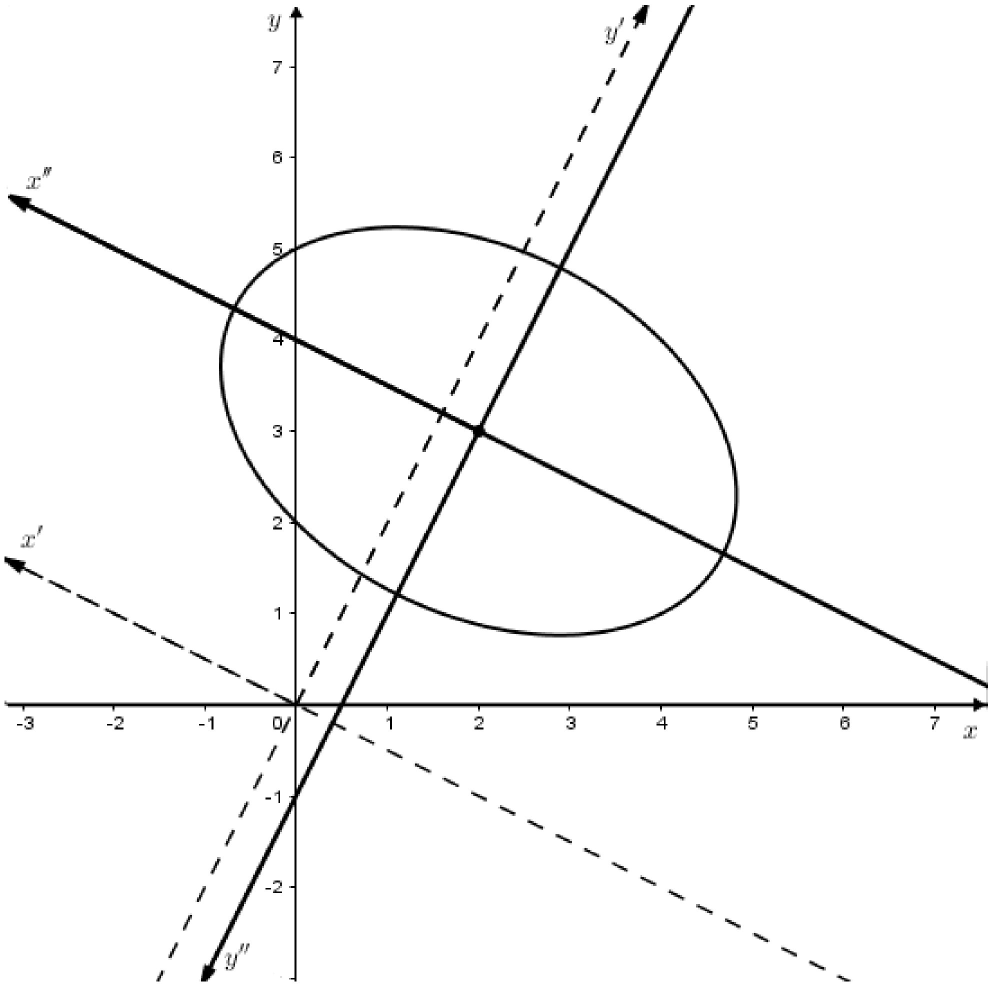


Slika 4.1: Dana elipsa prikazana u koordinantnom sustavu $x''y''$

Još je preostalo primijeniti izometriju (4.3) i vratiti se u početni koordinatni sustav xy. Koordinatni sustav $x''y''$ je u odnosu na koordinanti sustav xy zarotiran primjenom R^T, a zatim translatiran za $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$. Odredimo još kut φ rotacije R^T. Iz matrice S vidimo da je

$$\cos\varphi = -\frac{2}{\sqrt{5}} \quad \text{i} \quad \sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

iz čega slijedi da je $\operatorname{tg} \varphi = -\frac{1}{2}$. Dakle, kut rotacije je $\varphi = 153,4°$. Konačno, elipsu danu s (4.1) u koordinatnom sustavu xy možemo vidjeti na Slici 4.2.



Slika 4.2: Dana elipsa prikazana u koordinantnom sustavu xy

4.2 Primjer: hiperbola

Dana je jednadžba

$$2x^2 + 10xy + 2y^2 + 9x + 12y - 2 = 0 \tag{4.4}$$

koja određuje krivulju drugog reda. Analognim postupkom kao i u primjeru elipse svest ćemo (4.4) na kanonski oblik. Jednadžba (4.4) u matričnom obliku glasi

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - 2 = 0\,.$$

Svojstveni polinom matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ je

$$k_A(\lambda) = (\lambda + 3)(\lambda - 7)\,,$$

pa vidimo da je spektar matrice $\sigma(A) = \{-3, 7\}$. Kako su svojstvene vrijednosti različitog predznaka, imamo $\det A = \lambda_1 \lambda_2 < 0$ pa prema [5, §2, Teorem 6] očekujemo da (4.4) određuje hiperbolu. Svojstveni vektor za svojstvenu vrijednost $\lambda_1 = -3$ je $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, a za svojstvenu vrijednost $\lambda_2 = 7$ je $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Ortonormiranjem tih vektora dobivamo ortonormiranu bazu $\{v_1, v_2\}$, gdje su

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

i

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Zaključujemo da je ortogonalna matrica

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

matrica prijelaza, odnosno vrijedi

$$A = S \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} S^T\,.$$

Uzmimo opet da je

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = S^T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

odnosno

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

Zamjenom varijable promatrana jednadžba poprima oblik

$$-3(x')^2 + 7(y')^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}(-3x' + 21y') - 2 = 0\,. \tag{4.5}$$

Linearni član u (4.5) eliminiramo nadopunom do potpunog kvadrata. Imamo

$$-3(x')^2 - \frac{3}{\sqrt{2}}x' = -3\left(x' - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{3}{8}$$

i

$$7(y')^2 + \frac{21}{\sqrt{2}}y' = 7\left(y' + \frac{3}{2\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{63}{8}\,.$$

Uzimajući

$$x'' = x' - \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$y'' = y' + \frac{3}{2\sqrt{2}}\,,$$

jednadžba (4.5) poprima oblik

$$-3(x'')^2 + 7(y'')^2 - \frac{19}{2} = 0\,.$$

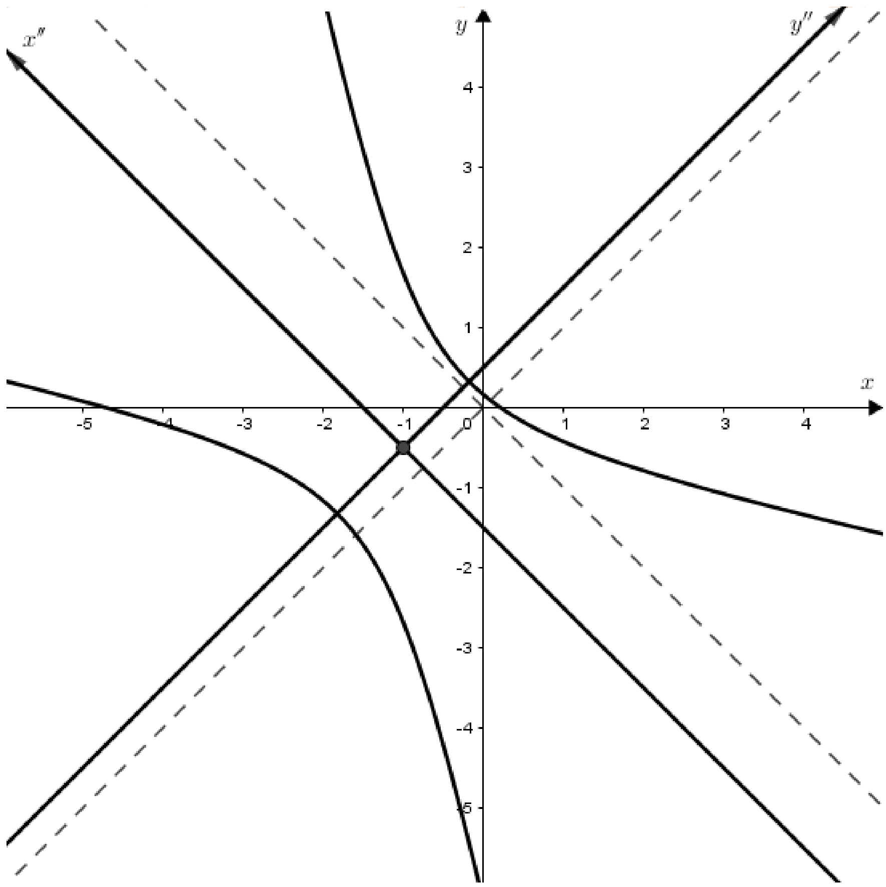
Konačna zamjena varijabli dana je s

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix},$$

odnosno

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Koordinatni sustav $x''y''$ je u odnosu na koordinatni sustav xy zarotiran za kut $\varphi = 225°$, a potom translatiran za $-\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Na Slici 4.3 prikazana je dana hiperbola u koordinatnom sustavu xy.



Slika 4.3: Dana hiperbola prikazana u koordinantnom sustavu *xy*

Bibliografija

[1] D. Bakić, *Linearna algebra*, Školska knjiga, Zagreb, 2008.

[2] R. J. Fleming, J. E. Jamison, *Isometries on Banach Spaces: function spaces*, Chapman & Hall/CRC, 2013.

[3] B. Guljaš, *Normirani prostori i operatori*, nastavni materijal za kolegij Normirani prostori, Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet, Zagreb, 2010. Dostupno na: `https://web.math.pmf.unizg.hr/~guljas/skripte/normirani_prostori.pdf` (stranica posjećena: 14. lipnja 2018.)

[4] D. Jovičić, M. Lapaine, *Grafički prikaz konika pomoću računala*, KoG, 1/1996, 19-26.

[5] S. Kurepa, *Uvod u linearnu algebru*, Školska knjiga, Zagreb, 1982.

[6] T. Wigren, *The Cauchy-Schwarz Inequality*, Karlstad University, Faculty of Technology and Science, 2015.

[7] *Art of Problem Solving*, Western Association of School and Colleges, dostupno na `https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php?title=1981_IMO_Problems/Problem_1` (stranica posjećena: 21. lipnja 2018.)

Sažetak

U ovom radu prikazane su samo neke od mnogobrojnih primjena linearne algebre u matematici, posebno u geometriji.

Iskazana je Cauchy - Bunjakovski - Schwarzova nejednakost na unitarnim prostorima, te su prezentirana četiri različita dokaza. Potom je prikazna njena važnost na nekoliko primjera iz geometrije (na primjer, definicija kuta u realnom unitarnom prostoru, određivanje maksimuma funkcije).

Iskazan je i dokazan Mazur - Ulamov teorem koji karakterizira izometrije (realnih) unitarnih prostora, odnosno daje dovoljne uvjete uz koje su izometrije nužno linearna preslikavanja. Primjena opisanih izometrija je pokazna na dva primjera u ravnini pri svođenju krivulja drugog reda na kanonski oblik.

Summary

In this thesis the focus is on presenting some of many applications of linear algebra in mathematics, particularly in geometry.

The Cauchy - Bunjakovski - Schwarz inequality on unitary (inner product) spaces is stated and four different proofs are given. The importance of this inequality is shown on four examples (e.g. definition of the angle in real unitary spaces, maximisation of functions under certain constraints).

The Mazur - Ulam theorem is stated and a proof presented. By this theorem a characterisation of all isometries on (real) unitary spaces is given, i.e. sufficient conditions on isometries to be linear mappings are provided. The use of above isometries is shown on two examples on the plane transforming second-order curves into their canonical form.

Životopis

Manuela Jurić rođena je 7. prosinca 1995. godine u Zagrebu. Odrasla je u mjestu Lipovljani gdje je pohađala Osnovnu školu Josipa Kozarca. Opću gimnaziju je završila u Novskoj, te 2013. godine upisala nastavnički smjer matematike na Prirodoslovno - matematičkom fakultetu u Zagrebu. Preddiplomski studij završila je 2016. godine i odmah potom upisala diplomski studij istog smjera.